Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

La variación acotada y su papel en el estudio del cambio

The bounded variation and its role in the study of change

Rodolfo David Fallas Soto
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. rdfallass@gmail.com

Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. rcantor@cinvestav.mx

RESUMEN

Ante la incapacidad de adelantar o atrasar el tiempo, surgen prácticas predictivas que nos ayudan a estudiar algún fenómeno y su cambio. La variación acotada que se estudia en este artículo nace a partir de realizar una problematización alrededor de la condición de Lipschitz, propiedad necesaria y suficiente para que la solución de la ecuación diferencial exista y sea única. Posteriormente se observa que la variación acotada se puede encontrar en diferentes actividades humanas y en diversas disciplinas, hasta en el cotidiano. En este artículo mostramos una herramienta teórico-metodológica que nos permite caracterizar e identificar prácticas asociadas a la variación acotada y cómo además el Teorema de Existencia y Unicidad juega un papel importante para la simulación de la trayectoria de un dron.

Palabras clave: Socioepistemología, variación acotada, Condición de Lipschitz.

Abstract

Given the incapacity of overtake or delay time, we use predictive practices that help us to study some natural or physical phenomenon and its change. The bounded variation which is studied in this article emerges from developing a problematization around the Lipschitz'condition, necessary and sufficient property so the solution of a differential equation exists and is the only one. Later, we observe that the bounded variation can be found in different human activities and various disciplines, even in everyday life. In this article, we show a theoretical-methodological tool that allows us to characterize and identify the bounded variation, besides identifying that the Existence and Uniquenees Theorem has a important role for the simulation of the trajectory of a drone.

Recibido: Mayo 1, 2018. Aceptado: Junio 25, 2018

Keywords: Socioepistemology, bounded variation, Lipschitz' condition.

1. INTRODUCCIÓN

La problemática de esta investigación nace al querer encontrar argumentos más visuales sobre la condición de Lipschitz, noción que se presenta en la escuela de forma algebraica, pero con una cantidad impresionante de usos en la matemática. Durante este proceso, se descubre un significado no solamente apoyado desde lo visual, sino que documentamos el uso que tiene esta condición sobre el manejo de la variación en las condiciones iniciales o estados que conforman el comportamiento de algún fenómeno; desde su modelación matemática, son puntos de la solución de una ecuación diferencial.

Durante el entendimiento y problematización de este saber matemático, desde el enfoque socioepistemológico, nos fuimos descentrando de dicho objeto matemático. El descentrarnos del objeto no quiere decir que no se hablará más de él, sino que al problematizar el saber matemático nos damos cuenta de aquellas prácticas que fueron protagonistas de la génesis y evolución de la noción matemática en estudio, que nacieron de pensamientos críticos y reflexivos, prácticas que lamentablemente el discurso matemático escolar tiende a opacar. En nuestro tema, nos dimos cuenta que las prácticas variacionales (comparación, estimación y predicción) hacen que la condición de Lipschitz sea parte de un modelo predictivo, de lo que se discutirá más adelante.

La Teoría Socioepistemológica y los principios que la sustentan (Cantoral, 2013) nos muestra que, desde la normatividad, existe una manera de organizar aquellas prácticas que acompañan la construcción del o de los objetos que nacen cuando el individuo realiza alguna labor racional en un grupo o comunidad específica. Es decir, que todo individuo desde su quehacer parte de acciones (hacer) que al organizarlas en conjunto y racionalmente se convierten en actividades (saber hacer) y cuando estas actividades son compartidas por un individuo, su cultura y el colectivo, se consolidan como prácticas socialmente compartidas (compartir el saber hacer) donde se alcanza un significado compartido en una cultura.

En este escrito, desarrollamos las ideas expuestas en los párrafos anteriores: partiendo desde la problematización de la condición de Lipschitz con uno de sus usos en matemática, nos abre la puerta para vislumbrar a la variación acotada, como ese conjunto de prácticas socialmente compartidas que nos permiten comprender el uso de las variaciones en un sistema para llegar a un estado deseado del fenómeno, ya sea para determinar estados futuros o condiciones iniciales deseados.

1.1. La variación acotada

La comunidad de investigadores que hemos trabajado en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) desde el enfoque socioepistemológico, venimos caracterizando y robusteciendo lo que entendemos por cambio y variación. Mencionamos ambas palabras ya que serán de vital importancia para comprender a lo que hemos denominado por variación acotada.

La variación será aquello más que solo cuantificar el cambio. Sobre esto, Caballero (2016) nos menciona que la variación no se observa, se infiere, se calcula, se mide, y por tanto se construye; la variación expresa la dinámica de las variables estudiadas o involucradas en el estudio de un fenómeno para darse cuenta de su evolución en los diversos estados que pueda presentar. Mientras tanto, el cambio corresponde a la acción o transición de un estado a otro, la modificación de algo.

Al ir robusteciendo la problematización realizada alrededor del teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales (Fallas-Soto, 2015), se comprende que la condición de Lipschitz juega un papel importante como propiedad necesaria y suficiente para que la solución exista y sea única, obteniendo la solución deseada. La variación acotada es, por lo tanto, el proceso que involucra a las prácticas predictivas en el estudio de las variaciones, obteniendo condiciones necesarias y suficientes para llegar a un resultado deseado.

Como parte de una herramienta teórico-metodológica se construye la siguiente tabla para observar los usos relacionados con la variación acotada en el estudio del cambio y la variación en fenómenos.

Práctica Socialmente compartida	Prácticas asociadas en el estudio de la variación acotada	Manipular la variación que sufre el fenómeno, ya sea en sus condiciones iniciales, o afectación durante la evolución del sistema. Es usar, además, la reversibilidad del pensamiento en determinar aquellas condiciones necesarias para obtener un estado ideal o deseado. En su forma contextual, las prácticas que aparecen en este estudio tienen su caracterización dada la práctica de referencia al que se encuentre, como parte de una construcción colectiva. Estudiar el ¿cómo debe ser el cambio para esperar los resultados deseados?

Actividad	Actividades asociadas en el estudio de la variación	Actividades relacionadas a estudiar y analizar el cambio que se percibe, con algún motivo racional del individuo. Estudiar el ¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿por qué cambia de esa manera?
Acción	Acciones relacionadas en la identificación y estudio del cambio	Emergencia de acciones en el identificar el cambio en un fenómeno, que presenta una evolución o modificación con el paso del tiempo o de un estado a otro. Estudiar el ¿qué cambia?

Tabla 1. Herramienta teórico-metodológica para analizar y caracterizar la variación acotada

Algunas características de la variación acotada que se han notado en los estudios realizados son las siguientes:

- Es el conjunto de aquellas prácticas involucradas en el estudio del cambio y la variación de un fenómeno en estudio, donde se deben plantear las condiciones iniciales, parámetros del fenómeno y condiciones necesarias para obtener un estado futuro ideal o deseado.
- Forma parte de una manipulación que se puede realizar ante las variaciones que puede sufrir o tener un sistema, ya sea en las condiciones iniciales o un estado posterior, con el fin de reorientar el fenómeno al comportamiento que se desee.
- Más que acotar las variaciones en un fenómeno, es todo el proceso involucrado para controlar dichas variaciones y obtener el producto esperado: un comportamiento ideal del fenómeno.

2. EVIDENCIA DE LA VARIACIÓN ACOTADA

Adentrémonos un poco en el problema escolar mencionado en la introducción, sobre el significado algebraico de la condición de Lipschitz. En algunos cursos de matemática nos mencionan que una función de una variable real es Lipschitz continua en un dominio A dado, si cumple

$$|f(x_2) - f(x_1)| < L|x_2 - x_1|$$

Para todo $x_2, x_1 \in A$, y L es un número real que se conoce como constante de Lipschitz.

Se profundiza sobre esta condición en uno de sus usos dentro de la matemática, en la demostración del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias (Fallas-Soto, 2015; Fallas-Soto, Cantoral, 2016). En esta problematización se reconoce una práctica de referencia que se caracteriza por un contexto industrial y revolucionario (1844-1880), época en donde los matemáticos que proponen el teorema de existencia y unicidad, Cauchy y Moigno (1844), estaban influenciados por la revolución francesa y Lipschitz (1868-1880) quien profundiza sobre las condiciones necesarias para que existiera y fuera única la solución de la ecuación diferencial; se vivía una revolución alemana. Además, son matemáticos que se desarrollan bajo un paradigma positivista, tratando de buscar la menor cantidad de hipótesis que garantizaran la existencia y unicidad de la solución.

De acuerdo con los aportes de Lipschitz reportados en sus trabajos (Lipschitz, 1868; 1880) en el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$ en (x_0, y_0), propone que una función $f(x, y)$ cumpla la condición

$$|f(h, k) - f(h, l)| < L \cdot |k - l|$$

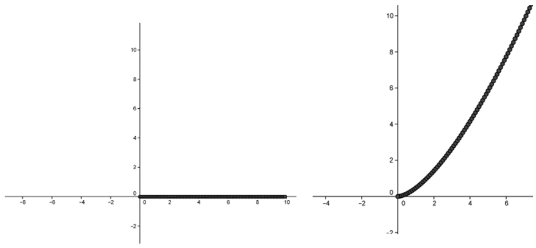
Donde L es conocida actualmente como la constante Lipschitz, para que la solución de la ecuación exista y sea única. Una interpretación a este problema es que si al valor y_0 se le aplica un incremento infinitamente pequeño, entonces, la solución para la cual converge no debería sufrir un cambio representativo en la vecindad de la condición inicial. Retomando un ejemplo de no unicidad se puede visualizar lo que se ha mencionado. Considere la ecuación

$$y' = y^{\frac{1}{3}}$$

Con la condición inicial $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, de ella obtenemos al menos dos soluciones, las cuales corresponden en su expresión analítica como:

$$y = 0, \qquad y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$$

Por lo tanto, la solución no es única con este valor inicial dado. Si aplicamos el método de las quebradas (método de Euler) considerando el punto $(0,0)$ obtenemos como solución a $y = 0$. En cambio, si consideramos el valor inicial $(0,0 + h)$ con h suficientemente pequeño, entonces la solución tiende a $y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$.



Solución obtenida cuando $y_0 = 0$

Solución obtenida cuando $y_0 = 0.0001$

Figura 1. Aproximaciones numéricas de la solución de la ecuación diferencial alrededor de (0,0) que da el método de las quebradas

Lipschitz (1868, 1880), asume esta condición y profundiza el método utilizado por Cauchy para sistemas de ecuaciones diferenciales. Se utiliza el método de las quebradas suponiendo que la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con la condición inicial (x_0, y_0) tiene dos soluciones, entonces se tendría dos recorridos diferentes de las rectas tangentes que se van determinando, pero la condición de Lipschitz nos restringe a que solo puede existir un recorrido de estas rectas tangentes y por lo tanto, su unicidad. Por lo tanto, la condición de Lipschitz es el resultado de un proceso de variación acotada, comprendiéndose como el estudio de aplicar esa pequeña variación y las condiciones necesarias para que exista y sea única, o como se diría en forma más coloquial "lo que debo hacer para obtener la solución deseada y única".

Por otro lado, en este trabajo se toma un acuerdo metodológico: se decide estudiar tareas de profesionales que estudien el comportamiento de un fenómeno como tal. Para ello, consideramos aquellas aplicaciones en las ecuaciones diferenciales (como se conocen en los libros de texto como crecimiento poblacional, trayectorias de partículas, temperatura, entre otros), en donde escolarmente presentan un uso utilitario, en el sentido de darle mayor peso a los métodos para resolver ecuaciones y restando peso al estudio del cambio en los fenómenos. En este documento reportamos solamente una tarea de un grupo de profesionales que trabajaron en simular la trayectoria de un dron para obtener un recorrido deseado del artefacto, un uso más funcional sobre la trayectoria de partículas como se presentan en los libros de texto. No se busca que se hable necesariamente de ecuaciones diferenciales, sino que en la problemática sea de interés el estudio del cambio en el fenómeno.

Actualmente, un campo de estudio dentro de las ingenierías, teoría de control, matemática aplicada, entre otras, son los trabajos con drones, o también llamado por sus siglas en inglés UAVs (Unmanned Autonomous Vehicles) siendo un vehículo aéreo no tripulado. Un problema que se trabaja en estas disciplinas es simular estos vehículos para que puedan seguir una trayectoria deseada y que no se aleje de la realidad, con el objetivo de cumplir varias funciones como la vigilancia del tráfico en carreteras, recolección de información para la predicción meteorológica, detección de alguna irregularidad en reservas biológicas y naturales, entre muchas otras.

El trabajo que se estudia corresponde a (Rosales, Scaglia, Carelli, & Jordan, 2011) que tratan de dar un seguimiento de trayectoria de un mini helicóptero de cuatro rotores basados en métodos numéricos, con el objetivo de encontrar las acciones de control óptimas que permiten llevar al vehículo del estado actual al deseado. Lo que presentamos en este trabajo es la descripción sobre una tarea de referencia de un grupo de personas que dentro la matemática aplicada y control automático trabajaron en una simulación para la trayectoria del dron.

Durante el diseño del controlador, Rosales et al., construyen una ley de control capaz de generar señales, con el objetivo de que la posición del helicóptero siga la trayectoria deseada. Justamente en esta frase se reconoce a la variación acotada en el comportamiento del fenómeno, colocando las condiciones necesarias para que tenga la solución que se desea obtener. Al momento de encontrar estas condiciones, aparece algo similar a la condición de Lipschitz, que es asegurar la trayectoria obtenida como la deseada, muy relacionado con el estudio del error (entre simulador y realidad). En este sentido, demuestran que, para que el error de seguimiento tienda a cero se construyen las siguientes diferencias:

$$
\begin{aligned}
x1_{(n+1)} &= x1d_{(n+1)} - kx_1\left(x1d_{(n)} - x1_{(n)}\right)\\
x3_{(n+1)} &= x3d_{(n+1)} - kx_3\left(x3d_{(n)} - x3_{(n)}\right)\\
x5_{(n+1)} &= x5d_{(n+1)} - kx_5\left(x5d_{(n)} - x5_{(n)}\right)\\
x7_{(n+1)} &= x7d_{(n+1)} - kx_7\left(x7d_{(n)} - x7_{(n)}\right)\\
x9_{(n+1)} &= x9d_{(n+1)} - kx_9\left(x9d_{(n)} - x9_{(n)}\right)\\
x11_{(n+1)} &= x11d_{(n+1)} - kx_{11}\left(x11d_{(n)} - x11_{(n)}\right)
\end{aligned}
$$

Figura 2. Referencias de velocidades para que el vehículo pueda seguir la trayectoria deseada, Fuente: Rosales et al. (2011, pág. 498)

Para que el error tienda a cero, concluyen que $0 < k\mathrm{x}_1, \mathrm{kx}_3, \mathrm{kx}_5, \mathrm{kx}_7, \mathrm{kx}_9, \mathrm{kx}_{11} < 1$.

Al final Rosales et al., dan resultados de la simulación, comparando siempre la evolución de la posición del cuadrirotor con el error del movimiento. Con esta breve narración presentada del estudio de Rosales et al., se identifica que las ideas que respaldan a la unicidad están muy asociadas en determinar la ruta que se desea para el vehículo, relacionado con al error, trabajando con la simulación desarrollada realizando cambios en los parámetros para estudiar así el nuevo cambio de la trayectoria. En un primer momento se obtiene un error que tiende a cero con los parámetros que dieron al controlador:

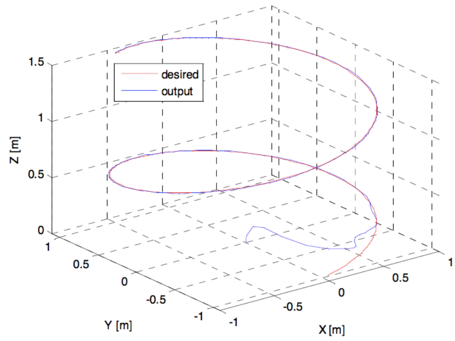


Figura 3. Evolución de la posición del cuadrirotor.
Fuente: Rosales et al. (2011, pág. 499)

Posteriormente agregan un error entre los parámetros del controlador y del modelo real, del orden del 20% y observan el cambio entre ambos comportamientos,

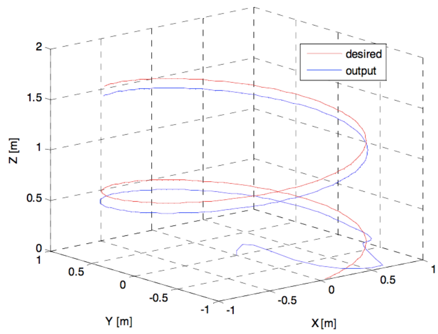


Figura 4. Evolución de la posición del cuadrirotor, con un error de los parámetros del 20%.
Fuente: Rosales et al (2011, pág. 499).

Esta comparación que realizan, es una herramienta de análisis para comprobar la robustez del controlador frente a errores en los parámetros. Esto es un resultado importante de acuerdo a los autores, ya que aseguran que no siempre se cuenta con los valores de los parámetros y los que ellos determinan ayudan a tener respuestas satisfactorias.

3. CONCLUSIONES

Para este estudio, se consideró una práctica de referencia que hemos caracterizado alrededor de la demostración del teorema de existencia y unicidad y donde nace la condición de Lipschitz. Por otro lado, sobre la trayectoria de un dron la consideramos por cuestiones teóricas como una tarea de referencia, dado que en este trabajo no se conoce más sobre la labor de los investigadores Rosales et al., su contexto, paradigma bajo el cuál trabajan, entre otros aspectos que caractericen a una practica de referencia: estructurada y estructurante del quehacer científico de una época.

De este estudio, obtenemos la siguiente síntesis, de una organización de prácticas que se deberían esperar ante situaciones de incertidumbre, ante tareas en donde se desconozca una regla para que se cumpla el comportamiento esperado de un fenómeno:

Práctica de referencia: Matemática	Tarea de referencia: Control automático
Demostración del teorema de existencia y unicidad	Simulación de la trayectoria de un dron
Prácticas socialmente compartidas: Inferir, Validar	
Establecer y validar la condición de Lipschitz	Validar el resultado de una trayectoria deseada con los parámetros que dieron
Actividad: Comparar, ensayo[1]	
Aplicar un cambio infinitamente pequeño en la condición inicial	Aplicar cambios en los parámetros considerados en el modelo.
Acciones: Medir, aproximar	
Aproximación de la solución	Aproximación y medición de la trayectoria

Tabla 2. Lo que se espera de una anidación de prácticas y el papel de la variación acotada

[1] Prueba que se hace para determinar si una cosa funciona o resulta como se desea

Con este trabajo, se hace un llamado al cuerpo docente en matemáticas, a estudiar de forma más dinámica las aplicaciones que se presentan en los libros de cálculo, ecuaciones diferenciales y otras asignaturas. A pesar de que los fenómenos que se estudien en estos cursos sean deterministas, el primer acercamiento que tenga el individuo o colectivo, tendrán un nivel relativo de incertidumbre ya que puede desconocer el comportamiento de fenómenos. Los autores Buendía y Cordero (2013) realizan un interesante trabajo para estudiar la forma y funcionamiento de las gráficas para las ecuaciones diferenciales, realizando cambios en las condiciones iniciales y en los parámetros de la ecuación para observar el cambio en la gráfica de la solución. Lo anterior es un trabajo que nos sirve de referencia para realizar futuros diseños de intervención para el estudio del cambio en fenómenos y actividades que fomenten de una manera más dinámica el realizar variaciones para obtener un resultado deseado.

En (Fallas-Soto, 2015) se realizó una problematización alrededor del teorema de existencia y unicidad, analizando la intervención y resultados de los matemáticos para obtener las condiciones mínimas pero necesarias para que se cumpliera la existencia y unicidad. En estos momentos de la investigación y como parte de las prospectivas del trabajo, se desea buscar campos profesionales en donde se ponga en juego la noción de variación acotada, campos profesionales en donde dado una problemática, se desconozca sobre la ruta que puede tomar el fenómeno, ya que existen profesiones que reaccionan en sus tareas o problemas de forma metódica para encontrar la solución (aplicar reglas o técnicas). El objetivo de esto último, es que desde la praxis (entrevistas, observaciones, participaciones) podamos fundamentar una anidación de prácticas que nos respalden lo dicho en este escrito.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Buendía, G., y Cordero, F. (2013). The use of graphs in specific situations of the initial conditions of linear differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* , 44(6), 927-937.

Caballero, M. (2016). *Los Sistemas de Referencia: El papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción* . Memoria Predoctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona, España: Gedisa.

Cauchy, A., y Moigno. (1844). *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*. Paris: Libraire de École Polytechnique.

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Fallas-Soto, R., y Cantoral, R. (2016). Estudio Socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. *História da Educação Matemática*, 2(3), 256-280.

Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. Bonn, Deutschland: Verlag Von Max Cohen & Sohn.

Lipschitz, R. (1868). Disamina della pknossibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie . *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2(2), 288–302.

Rosales, C., Scaglia, G., Carelli, R., y Jordan, M. (2011). Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos. *XIV Reunión de Trabajo Procesamiento de la Información y Control*, 495-500